

ゲーデルの宇宙

内井惣七

ゲーデルが論理学だけでなく、一般相対性理論や哲学にも大きな関心を寄せていたことは、すでによく知られている事実である。小論では、いまや有名となった「ゲーデル宇宙」（重力場方程式の厳密解の一つ）の発見と、ゲーデルがそれから引き出そうとした哲学的な帰結とを紹介したが論じてみたい。この話題に関わる、ゲーデルの生前に発表された論文は(1949)、(1949a)、および(1952)の三編（いずれもオックスフォードから刊行されている『ゲーデル著作集』の表記に従う）しかないが、遺稿から編集されて著作集に収められている原稿(1946/9-B2)、(1946/9-C1)、および(1949b)をわれわれは参照することができ、編集に当たった人たちのこれまでの研究も参考にすることができる。

1. ゲーデル 1949 年の論文の背景

「アインシュタインの重力場方程式に対する、新しいタイプの宇宙論的解の一例」と題された論文が（1949）論文である。四ページほどの小さなスペースにテクニカルな結果が凝縮されたような形で述べられているので、哲学者や一般読者にはきわめてとっつきにくい論文であるが、当時にとっては驚くべき結果が示されている。最も際だった特徴は、このゲーデル宇宙では、四次元時空の任意の二点間で——とくに、現在の出来事から過去の出来事へ——移動が可能だということである。もちろん、現在ではタイムマシンやタイムトラベルの話が一部で流行しており、現在から過去へ移動するための通路を表す「ワームホール」という言葉さえ一般的に使われるようになっている。しかし、ゲーデル宇宙でのタイムトラベルは、そのような複雑な時空構造を必要としない、きわめてシンプルなものであることが特色である。以下では、まず、このハイライトを大した予備知識なしでも理解できるように解説（Hawking & Ellis 1973 および Malament 1985 に多くを負うことをあらかじめお断りしておく）したいが、その前に、この論文を理解するための最小限の背景を知っておく必要がある（哲学者向けの解説として、一般相対性の基本については内井 2004、2 – 5 章を、宇宙論については内井 2006、第 V 章を参照されたい）。

ゲーデル以前の宇宙論的解は、(1) アインシュタイン自身による一様で静

的な球形宇宙、1930年頃までその対抗馬と見なされていた(2)ド・ジッター宇宙(静的な解と見なされていたが、動的な膨張宇宙であることが後に判明)、そして(3)ロバートソン-ウォーカーによる解(現在では、先駆的だったフリードマンとル・メートルに敬意を表して、「フリードマン宇宙」、あるいは四人の名前で呼ばれることも多い)、すなわち膨張(および収縮にも転じうる)宇宙の解が知られていた。また、1949年は、ガモフのグループが火の玉(ビッグバン)宇宙論を提唱した直後の時期に当たることも想起しておこう。

これらの解の特徴とともに、その解がどのような条件のもとで得られたかも確認しておかなければならない。アインシュタインの解では、かなり強力な対称性の条件(宇宙の物質密度が均一だという一様性と、どの方向にも違いがないという等方性)が課された上で、宇宙の状態には大局的に変化がないという「静的宇宙」の条件が満たされるように、いわば天下りで要請されているのである。宇宙を満たす物質は、(宇宙全体から見れば)チリのような粒子として均一に分布するものとされている(これらが、銀河に相当)。この条件は(2)および(3)にも引き継がれているが、(2)では物質密度がゼロにまで削減されているのが際だった特徴である。念のために注意すれば、「物質密度ゼロ」は物質がないことを意味しない。チリ(銀河)の分布があまりにもまばらなので、宇宙全体の重力場を決定するにはまったく貢献しないということである。宇宙の中に、「テスト粒子」(銀河に相当)は何個も存在しうるのである。

では、物質密度ゼロのド・ジッター宇宙では、何が重力場を生み出しているのだろうか。それは、アインシュタインが後に「わが生涯最大のチョンボ」と嘆いた宇宙定数 Λ である。これは、空っぽの空間(真空)が持つエネルギー、あるいは物質間の引力に対抗する斥力の大きさを表すと考えてよい。そのことは、アインシュタインがこの宇宙定数を導入せざるをえなかった事情を調べてみればよくわかる。

アインシュタインの一般相対論(すなわち重力理論)以前は、重力とは引力だと見なされていた。ニュートンの「万有引力」の法則という名が示すとおりである。そうすると、多くの物質が分布する宇宙ではどうなるだろうか。物質同士が引きつけ合って、早晚すべての物質は一つの塊になってしまうのではないだろうか。ところが、現実の宇宙ではそうになっていない。ニュートン自身もこの問題に直面し、その解決のために、無限の空間に無限の物質が大局的には均等に散らばっているという宇宙像を想定した。同じような問題は、一般相

対論でも再現する。一般相対論で宇宙全体を扱おうとすると、宇宙の大きさがただちに問題となる。なぜなら、もし宇宙が無限大だとすると、無限遠点で重力場がどうなっているかという問題が生じ、これを補わないことには重力場方程式が解けないのである。これが「境界条件の問題」であり、アインシュタインが宇宙論でこれの扱いに苦慮したことは、彼の 1917 年の論文からもよくわかる。そして、物質が重力場を決めるはずだという考えにとらわれていたアインシュタインがたどり着いた解決策は、有限で閉じた宇宙、球形の宇宙だった（物質密度はゼロでなく正の値）。有限であれば、境界条件の問題は解消し、最初に課した条件もクリアすることができる。

ところが、そのためには、1915 年に提出した重力場方程式ではうまくいかず、一つ修正を加える必要があった。有限の球形宇宙を静的に保つためには、重力で収縮（あるいは、場合によっては膨張）してはならず、収縮させる引力に対抗する力、斥力を補わないとバランスが保てないのである。そのために、修正された方程式に導入されたのが宇宙定数 Λ だったのだ。

しかし、皮肉なことに、ド・ジッターは、修正された方程式によれば、物質密度がゼロでも一様で等方的な宇宙が可能であることを発見した。これがド・ジッター宇宙であり、重力場は Λ のみによって決まるのである。その後、ル・メートルやロバートソンらの研究によって、ド・ジッター宇宙は膨張（しかも指数関数的に膨張する）宇宙であることが判明した。後知恵からすれば、引力と斥力のバランス状態から引力を取り除けば（物質密度ゼロなので）、斥力で膨張することは、直観的に明らかであろう（この斥力は、重力場方程式によって決まるので、やはり重力なのである）。また、アインシュタインの球形宇宙がきわめて不安定な平衡状態に依存することも明らかになった。この宇宙は、少しでもバランスが崩れると、収縮または膨張に転じるのである。こういった事情から、1930 年代に入ると膨張宇宙論が盛んとなってくる。しかし、これらすべてに共通する前提は、宇宙が大局的には回転しない、ということだった。

ゲーデル宇宙の特性を理解するためには、以上の諸点を記憶しておくことが肝要である。

2. ゲーデル宇宙

では、いよいよゲーデル宇宙に入ろう。ゲーデルは、それまでの一様な宇

宙モデルにひねり（回転）を加えたのである。宇宙を均等に満たすチリ（物質）は、互いに一定の距離を保ち、どのチリから見ても、他のチリはその周りを一定の角速度で回転している、つまり、全体として剛体のように回転している。この点がわかりにくいと思う読者は、次の図1を参照されたい。変形しない剛体が回転しているとすれば、その上のどの二点を取っても、図の（1）と（2）に示したように条件は対称的で、どちらを中心と見なしても同じ角速度の回転となる（ジャイロスコープは同じ方向を指し続ける特性があるので、その地点でのジャイロスコープを基準として回転角度を測る）。

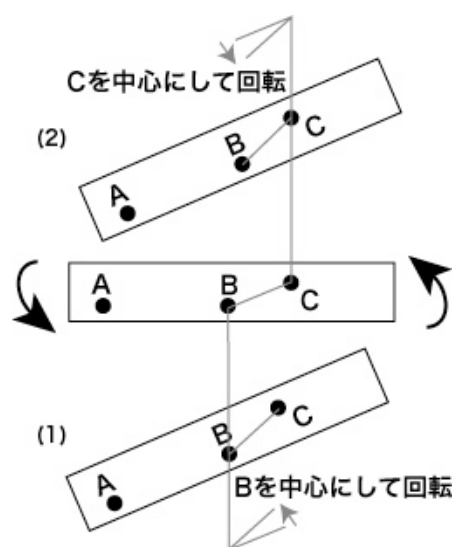


図1 剛体の回転

この回転はいわば天下りで加えられた条件で、物理的に根拠があるわけではない。また、物質密度と宇宙定数 Λ （ゲーデル宇宙では負の値となる）の間に一定の関係が成り立っていなければならない。しかし、このひねりが加わるだけで、目の覚めるような（現実的ではないけれども）斬新な宇宙論が生まれる。

ゲーデル宇宙を示すダイヤグラムは図2である（空間の次元は一つ削減して2次元となっている）が、これを理解するためにはいくつかの相対論的な概念を押さえておかなければならない。すでに述べたように、ゲーデル宇宙には多数の物質のチリ（銀河に相当）が均等（一様）に分布しているが、このチリの密度と宇宙定数 Λ が宇宙全体の重力場を決定することになる。図1では、時間が（とりあえず）下から上に流れているものとして、二つのチリの軌跡を縦

の直線で表してある（どちらの線を基準にしても同じような図が描ける）。このような軌跡は「世界線」と呼ばれる。

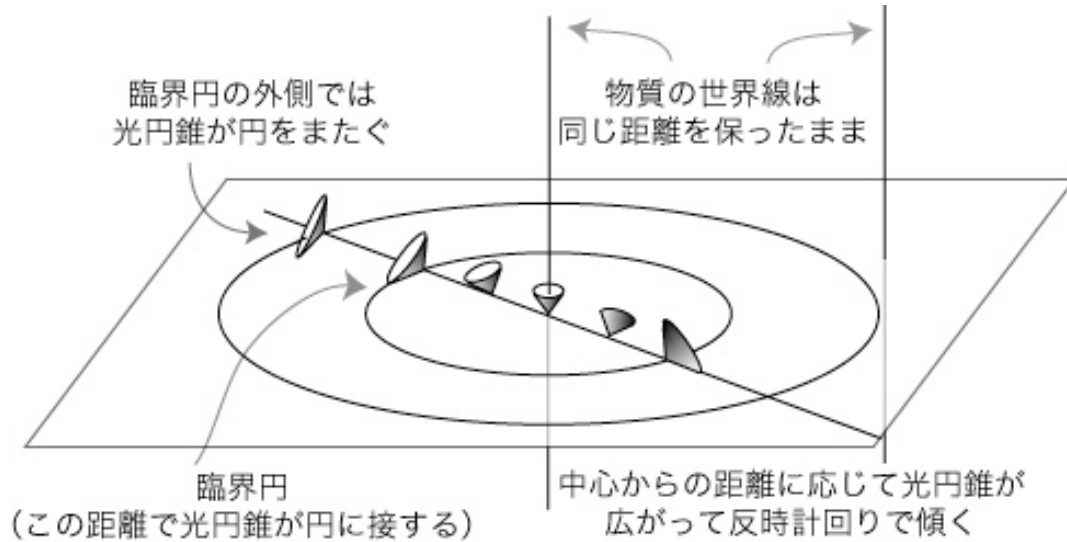


図2 ゲーデル宇宙のダイヤグラム

次に、相対論の基本とも言うべき光円錐の振る舞いを説明しよう。一般相対論でも微小領域では特殊相対論が成り立つので、局所的には光が伝わる領域は光円錐で表され、これが因果作用の伝播する上限となる。ところが、ゲーデル宇宙に導入された回転により、中心から外側へ向かうにつれて、光円錐の向きが図のようにねじれてくる。重要なことは、中心から一定の距離の所に臨界点があり、そこでは光円錐が、中心の光円錐が決める同時性平面（空間）に接するようになり、そこから先では同じ平面をまたいで下方にも光が伝わるようになるという点である（そのためには接線方向の速度——角速度ではなく——が一定の値より大きくならなければならない）。これは、もちろん、ゲーデルの解として得られたメトリック（計量）——これが宇宙の幾何学的構造を決める——によって厳密に導かれる特性であり、ダイヤグラムはそれを直観的にわかりやすく図示したものにすぎない。しかし、これがわかるだけで、ゲーデル宇宙でのタイムトラベルは完璧に理解できるようになる。ちなみに、ゲーデル自身の手になる解説で最もわかりやすいのは、講演の原稿（1949b）である。

光円錐が傾いていく理由は、次のように（当面、特殊相対性のみで単純化して）考えてみればわかりやすい。図の中心の物質の周りを他のすべての物質が同じ関係を保ったまま回転している（物質の世界線は互いに平行なまに見

える)。そうすると、中心 A から B までの距離が増えるほど、B 地点での (A に比しての) 相対的移動速度 (円の接線方向) は大きくなる。特殊相対論によれば、速度が変われば (同時性の相対性により) 同時性の面 (その地点での空間軸) も変わってくる。もちろん、B の地点での時間軸 (空間軸に直交している) は、運動状態が決めている。そこで、A 地点での同時性面に時間軸を直交させていた光円錐と、B 地点の同時性面に時間軸を直交させている光円錐とでは、回転により生じる重力場の影響も加わって、向きが異なってくる (重力場では光速が変わり、光線は曲がる)。それがすなわち光円錐が傾くということなのである (図 3 を参照。運動の時間軸を平行移動させても角度は変わらないことに注意)。要するに、光円錐が傾くのは、地点地点での同時性面 (空間軸) が、運動状態と連動して傾くからである。

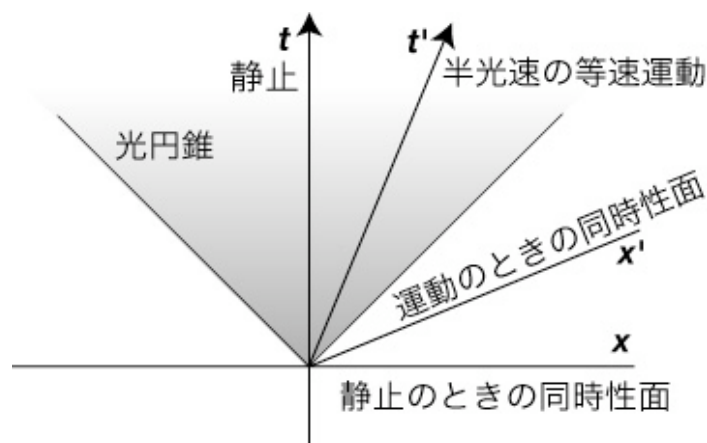


図 3 同時性の相対性

このことから、「ゲーデル宇宙では、すべてのチリに共通な時間、いわば宇宙時間、を決めることはできない」という重要な帰結が出てくる。もうすこし詳しく解説するなら、時間軸は空間軸に直交するという、特殊相対論でも成り立っていた条件を時間軸の基準とするなら、回転宇宙ではこれをすべてのチリについて満たす時間軸は決して成立しない。他方、時間軸のこの基準をゆるめて、任意の角度でよいとしても、同一条件 (つまり同じ角度) をすべてのチリについて満たすことは、これまた同様に不可能である。個々のチリによって条件 (角度) を変えてもよいのだとすると、これは混沌以外の何ものでもなく、きわめて恣意的となって、とても「宇宙時間」とは言えない。

一般相対性でも、局所的には特殊相対性が成り立ち、個々のチリにおいて

測る時間の軸はそこでの空間軸に直交している。そして、ゲーデル以前の宇宙モデルでは、すべてのチリの時間軸に直交する空間が成立し、したがって共通の時間が成立したのである。とくに、アインシュタインの球形宇宙は静的なのでこの点が明白であろう。膨張宇宙論を基本とする現代宇宙論でも、宇宙の年齢は約 137 億年（局所的には——たとえばブラックホールの近傍では——時間のズレがあっても）といわれるとき、同じような前提が暗黙の内に認められている。しかし、ゲーデル宇宙では、宇宙的な規模で、同じ基準に基づく宇宙時間を決めることは不可能になる。それどころか、次に述べるタイムトラベルによって、時間の前後関係さえ、大局的には成り立たなくなってしまうのである。

3. ゲーデル宇宙でのタイムトラベル

これからのタイムトラベルの話は、ゲーデル宇宙の中でそういう世界線の経路が物理的に可能だということであることを銘記されたい。SFの話ではないし、われわれの世界でこういうことが可能だという話でもない。

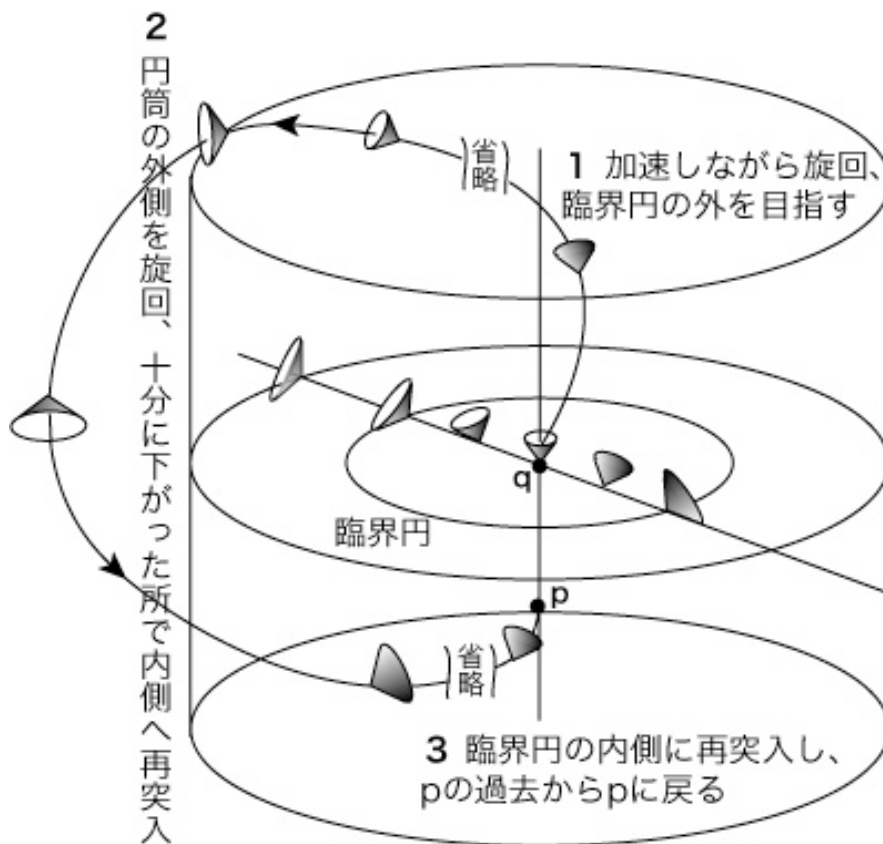


図4 ゲーデル宇宙でのタイムトラベル

まず図4を参照されたい(図の光円錐は必ずしも正確でないが、わかりやすくするためデフォルメしてあると理解されたい)。これから企てるタイムトラベルは、点 q から、その過去に当たる点 p へ戻る旅である。注意しなければならないのは、ゲーデル宇宙の中では、局所的には光円錐がきちんと成立するので、それによって定義される局所的な「過去、現在、未来」は区別でき、時間が経過する向きも決まるということである。未来へ向かう(または過去から来た)世界線は、専門用語では「時間的」世界線と呼ばれる(ゲーデル宇宙で物質の世界線は時間的でなければならないが、これが図4では必ずしも反映されてない)。さて、(1) q を出発したあなたは、加速しつつ、光円錐の内側を旋回して臨界円の外側を目指す。この円の外側では、光円錐が臨界円のある平面をまたいで、下側へ行くことが可能になる(図1の光円錐群を再現してあるので確認されたい)。次に、(2) 臨界円の外側の適当なところで、外側の円筒の外を旋回しながら、もとの q が乗っていた平面をすぎ、 p が乗っている平面の下方を目指し、十分下方に来たら、外側の円筒の内側へ再突入する(これも、突入箇所の光円錐により可能である)。そして、最後に、(3) 臨界円を目指して再突入し、 p の過去から p に戻るのである(これも、光円錐の構造によって可能)。結局、あなたは、局所的な未来へ向かい続けたあげく、自分の過去の時点へ戻ったことになる。

以上のようなタイムトラベルは、特定の二点間だけで可能なのではない。同じような過程を適当にアレンジすれば、任意の二点間で可能なのである。かくして、ゲーデル宇宙では、共通の宇宙時間を決めることができないだけでなく、大局的な時間の前後関係さえ定義できなくなってしまう。なぜなら、局所的な未来(直観的には、後の時点)を目指し続けて、局所的な過去(直観的には、前の時点)に戻りうるので、この経路ではどちらが前か後かという区別が崩れてしまうからである。これが、ゲーデル宇宙のハイライトだと言っても過言ではないだろう。事実、ゲーデル論文に対するアインシュタインのコメントも、この点に集中している。

4. ゲーデル宇宙の発見過程

ゲーデルはいかにしてゲーデル宇宙の解にたどり着いたのだろうか。これについては、デイヴィッド・マラメントの研究と、それに依拠したハワード・

スタインの研究（ゲーデル論文に対する注釈）があるので、かいつまんで紹介してみよう。

『アインシュタイン、哲学者-科学者』（1949）というシルプ編の有名な本があるが、ゲーデルもこれに論文を寄稿している（Gödel 1949a）。これは、相対性の時空論とカントなどの観念論哲学の時空論とを比較した論文であるが、これの執筆中に彼はゲーデル宇宙を発見したことがわかっている。ゲーデルの遺稿の内に、（1949a）と内容が重複する原稿が数点見つかり、これらの内容を検討したマラメントやスタインによって、だいたいの執筆順序が特定されている。出版された論文は最後に書かれたもので、しかも分量が極端に削減されている（たった 6 ページ）ことに注目しなければならない。わたし自身の推察では、ゲーデルが当初、相対論と「観念論」哲学との比較を敷衍しようとしたものの、ゲーデル宇宙の発見により、こういった比較が色あせてしまって、このような結果になったのではないかと考えられる。哲学論文執筆中に科学的な発見にいたるなど、並の学者にはできることではないし、科学哲学に携わるものにとっではうらやましい限りである。

この遺稿群を編集したスタインの解説によれば、ゲーデルによる相対論での時間と変化についての考察は、(a)主として特殊相対論に着目して行われ、カント哲学との比較が目指された（ニュートン的な絶対時間がどちらでも否定される、という趣旨）。(b)しかし、この考察に対するありうる反論として、物理学者のジーンズらの見解、「一般相対性では絶対時間相当のものが復活する」という見解を検討する必要性が生じた。(c)この見解を論駁するため、回転する宇宙では時間について特殊相対性と同じような結果が得られるだろうと見当をつけた探求の結果、回転宇宙の定式化に成功した。さらに、(d)この回転宇宙では、これまでの時間や変化の概念が覆される結果が得られるという、まったく予想されなかった発見に行き当たった。この経緯は、モーゲンスターンの日記の記述からも確認されるという（ゲーデル著作集 3、208、編集者の注）。

いずれにせよ、このような経緯の細部のいかににかかわらず、アインシュタイン本に寄稿したゲーデルの論文（1949a）自体の構造と全体像が、ズバリ核心を示している、とわたしは考える。この論文では、問題提起の後、相対論と観念論哲学のチマチマした比較は取るに足りないものとなって、ゲーデル宇宙のハイライトがインフォーマルに、かつ簡潔に述べられて、短いけれども大変に強いインパクトを与えて終わる。乱暴な言い方をすれば、カントの時空論

との比較などどうでもよくなる（したがって、小論でも解説を省いたが、これはゲーデルのスタイルに敬意を表してのことである）ほどの、ゲーデル宇宙の驚くべき特性が主役に成り代わったのである。この論文のタイトルだけ見て、「かの有名なゲーデルが、カント哲学や観念論哲学の復権に手を貸してくれた」と喜ぶ哲学者、哲学史家がいたなら、それは大間違いである。この論文の最大のポイントは、一般相対性理論がはらんでいた予想外の可能性がまた一つ明らかにされて、（観念論ではなく）物理学に基づく時間論にまた新たな局面が切り開かれたということなのである。

ちなみに、相対論的な宇宙論とカントの時空論の間の決定的な違いは、時空が「感性的直観の形式」というアプリアリなものとは見なされず、少なくとも重要な部分で経験的探求に基づいて時空構造が決められなければならないという認識にあり（Gödel 1946/9, B2 18/244）、ゲーデルはそんなことは百も承知だが、なおざりにされていた類似性の方に注意を喚起しようとしたのだ。しかし、すでに述べたように、公表した論文では、そのような記述をほとんど削除してしまった。われわれは、ゲーデルのこの意志を尊重すべきであって、遺稿として残された原稿、いわば下書き（出版を意図されたものではない）に書いてある文章に引きずられた解釈をすべきではないのである。

5. おわりに

ゲーデルは、この論文以降、もうしばらく一般相対論関係の仕事が続けた。それは、やがて宇宙論の主流となっていく膨張宇宙論と、自らの回転宇宙論との折り合いを探るためだったと考えられる。その結果は論文（1952）となって出版されている。これは、回転宇宙に膨張を加えたもので、観測宇宙論での銀河の赤方偏移とも折り合いをつけ、より現実的な宇宙論を目指したものである。この改訂版でも、共通の宇宙時間が定義できないという特性は残ったままで、その点は次のように要約されている。空間的に一様な有限宇宙が回転していることの必要十分条件は、物質とともに運動している観測者の局所的な同時性が、宇宙全体にわたる同時性を定義しないということである（1952, 178.）。もっとも、これは「要約」というよりも、回転宇宙の解を求めようとしたそもそもの発想のもとだったと考えられる（小論2節での、光円錐の傾斜の解説を想起されたい）。

しかし、1949 論文のハイライトだったタイムトラベルの可能性は、この論

文では排除される。有限宇宙では、回転速度が大きくなければ、この可能性は生じない。そして、観測宇宙論と折り合いをつけるためには、宇宙に回転があるとしてもそれはごく小さな速度の回転でしかありえないのである。

この論文の意義も、決して小さなものではないと思われるが、インパクトという点では、1949年の論文とは比較にならない。宇宙論や時間論でゲーデルが語り継がれるのは、やはり古い方の論文が示した法外な可能性と、そのインパクトとによってであろう。

文献

Bernstein, J. and Feinberg, G., eds. (1986) *Cosmological Constants*, Columbia University Press.

De Sitter, W. (1917) “On Einstein’s Theory of Gravitation, and its Astronomical Consequences”, reprinted in Bernstein & Feinberg (1986), pp. 27-48.

Einstein, A. (1917) “Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie”, *Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte* (1917), 142-152; English translation in Bernstein & Feinberg (1986).

Gödel, K. (1946/9, B2) “Some Observations about the Relationship between Theory of Relativity and Kantian Philosophy”, in *Kurt Gödel Collected Works 3*, ed. by S. Feferman, J. W. Dawson, Jr., W. Goldfarb, C. Parsons, and R. N. Solovay, Oxford University Press, 1995, 230-246.

〔ゲーデルの論文へのページ言及は、オリジナルのページ番号と、著作集のページ番号とをスラッシュで分けて併記する。たとえば、「18/244」は原論文の 18 ページ、著作集該当巻の 244 ページという意味である。〕

Gödel, K. (1946/9, C1) “Some Observations about the Relationship between Theory of Relativity and Kantian Philosophy”, in *Kurt Gödel Collected Works 3*, ed. by S. Feferman, J. W. Dawson, Jr., W. Goldfarb, C. Parsons, and R. N. Solovay Oxford University Press, 1995, 247-259.

Gödel, K. (1949) “An Example of a New Type of Cosmological Solutions of Einstein’s Field Equations of Gravitation”, in *Kurt Gödel Collected Works 2*, ed. by S. Feferman, J. W. Dawson, Jr., S. C. Kleene, G. H. Moore, R. N. Solovay, and J. V. Heijenoort, Oxford University Press, 1990, 190-198.

Gödel, K. (1949a) “A Remark about the Relationship between Relativity Theory and Idealistic Philosophy”, in *Albert Einstein: Philosopher-Scientist*, ed. by P. A. Schilpp (Library of Living Philosophers), 557-562; *Kurt Gödel Collected Works 2*, ed. by S. Feferman, J. W. Dawson, Jr., S. C. Kleene, G. H. Moore, R. N. Solovay, and J. V. Heijenoort, Oxford University Press, 1990, 202-207.

Gödel, K. (1949b) “Lecture on Rotating Universes”, in *Kurt Gödel Collected Works 3*, ed. by S. Feferman, J. W. Dawson, Jr., W. Goldfarb, C. Parsons, and R. N. Solovay Oxford University Press, 1995, 269-287.

Gödel, K. (1952) “Rotating Universes in General Relativity Theory”, in *Kurt Gödel*

- Collected Works 2*, ed. by S. Feferman, J. W. Dawson, Jr., S. C. Kleene, G. H. Moore, R. N. Solovay, and J. V. Heijenoort, Oxford University Press, 1990, 208-216.
- Hawking, S. and Ellis, G. F. R. (1973) *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press.
- Malament, D. (1985) "'Time Travel' in the Gödel Universe", *PSA 1984* (ed. by P. Asquith and P. Kitcher), vol. 2, 91-100.
- 内井惣七 (2004) 『アインシュタインの思考をたどる——時空の哲学入門』、ミネルヴァ書房。
- 内井惣七 (2006) 『空間の謎・時間の謎——宇宙の始まりに迫る物理学と哲学』、中公新書。